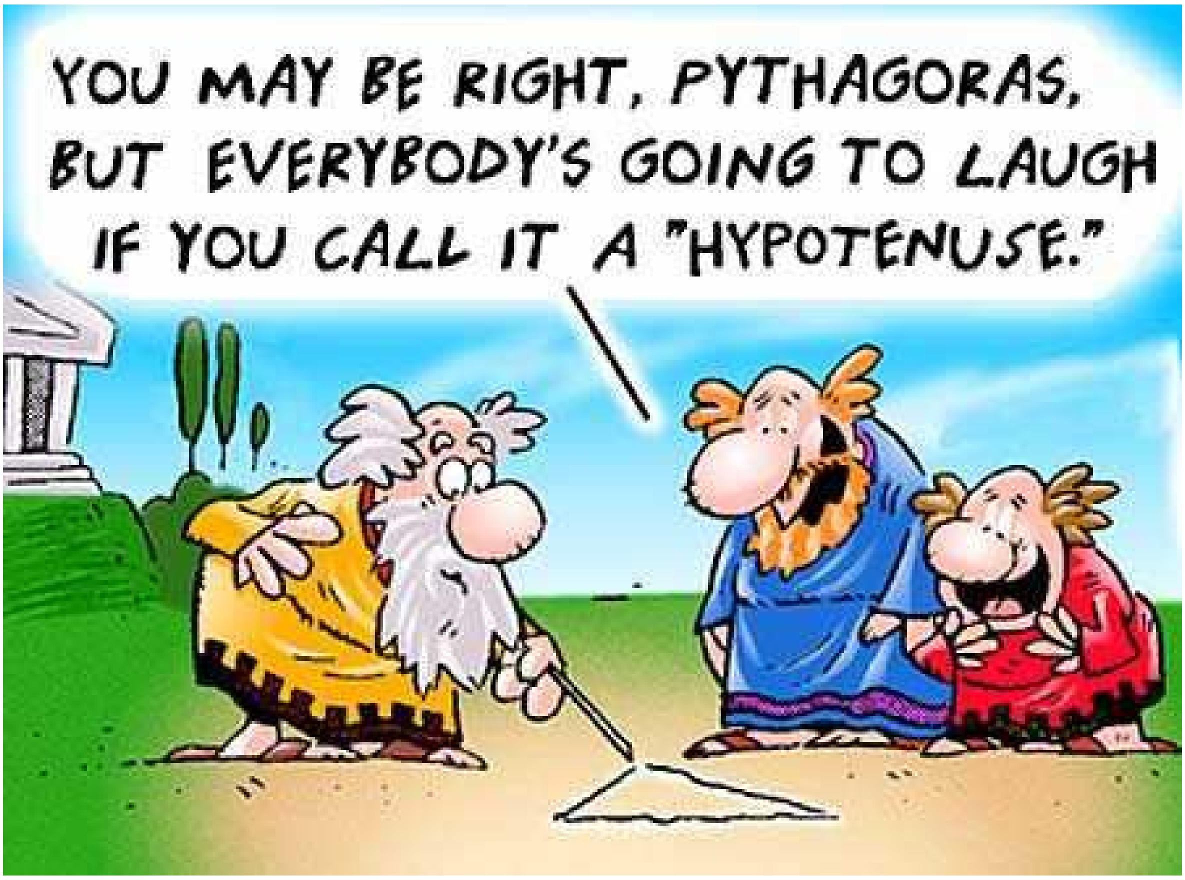
Profielwerkstuk
Geschiedenis van de wiskunde



De wondere wereld van de wiskunde voor Christus.

Diango Alvarez
V6

Inhoudsopgave

Voorwoord

Ongelofelijk maar waar! Ik heb gekozen voor wiskunde als onderwerp voor mijn profielwerkstuk en daarbij komt nog eens bij dat ik in mijn eentje te werk ga. Velen verklaarden mij voor gek maar ik was er van overtuigd dat ik wel de potentie had om een behoorlijk wiskundig werkstuk te maken.
Eenmaal gekozen voor wiskunde als onderwerp leek het mij leuk om te onderzoeken hoe, waar en door wie de wiskunde is ontstaan. Hoe zagen de eerste vormen van wiskunde er uit? Op welke manier is wiskunde ontstaan? Wie waren er zo geestig geweest om al die ingewikkelde formules te bedekenken?
Ik heb mij in mijn onderzoek beperkt tot de grote lijnen van de wiskunde v.Chr.. Aan Babylonische wiskunde heb ik meer aandacht besteed.

Met een sprankje trots mag ik terug kijken naar een naar mijn mening geslaagd werkstuk. Doordat ik niet wist hoe ik moest starten en er ook tegenop zag, liep ik al gauw achter op schema. Na een aantal maanden nauwelijks iets op papier te hebben gezet ging de tijd toch wel dringen. Een winterse vrijdag zorgde voor de omslag. Samen met een zeer deskundige op dit gebied hebben we een start kunnen maken. Dit zorgde voor verschil in motivatie en werkhouding. De laatste paar weken heb ik mij dan ook volledig geconcentreerd op dit werkstuk en veel tijd erin gestoken. Het resultaat is in een werkstuk geworden dat een beeld geeft van de ontwikkeling van de eerste vormen van wiskunde.

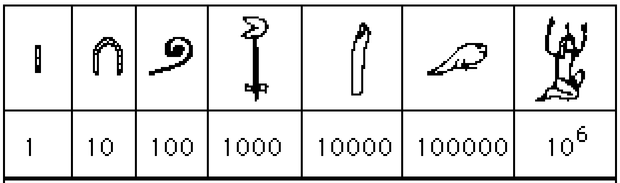
Inhoudelijk gezien is het geworden zoals ik gepland had: een lopend verhaal van de ontwikkeling van de wiskunde voor Christus.
Mijn werkstuk kan worden onderverdeeld in drie tijdperken namelijk: Egyptische Wiskunde, Babylonische Wiskunde en Griekse Wiskunde. Zoals beloofd ben ik dieper ingegaan op het onderdeel Babylonische Wiskunde. Al bleken de andere onderwerpen nagenoeg net zo interessant te zijn.
Ik heb nog een extra onderdeel in mijn werkstuk gemaakt te wetende ‘Het getal π’. Dit onderwerp heb ik toegevoegd aangezien het naar mijn mening een van de meest fascinerende getallen is. Ook heeft het zijn eigen ontwikkeling die rond hetzelfde tijdperk begint waarin de eerste vormen van wiskunde ook zijn ontstaan. Daarnaast is het gewoon een erg leuk hoofdstukje met grappige feitjes.

Ik mag concluderen dat dit een leerzaam project voor mij is geweest. Niet alleen heb ik kennis gemaakt met andere vormen en methoden van wiskunde, maar ook algemeen gezien heb ik het een en ander opgestoken. Ik heb gemerkt dat het kritisch bestuderen van bronnen en het kritisch naar je eigen werk kijken, onder andere vaardigheden zijn die van groot belang zijn in een groot project. Ook de manier van formuleren en het aantrekkelijk maken van een tekst zijn niet onbelangrijk.

Lijkt de oorsprong van wiskunde je interessant treed dan binnen en laat je verleiden door de magie der getallen!

Egyptische Wiskunde

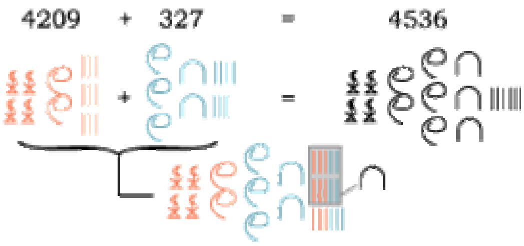
In Egypte is het gebruik van wiskundige symbolen en notaties ontstaan rond 3400 v. Chr. De Egyptenaren ontworpen een systeem gebaseerd op hiërogliefen, kleine tekens die woorden representeren. De verschillende symbolen die ze gebruikten om getallen aan te duiden, stonden voor één eenheid, tien eenheden, honderd eenheden, duizend eenheden, tienduizend eenheden, honderdduizend eenheden en één miljoen eenheden. Het schema hieronder laat zien welke symbolen ze waarvoor gebruikten.



Egyptian numeral hieroglyphs

Optellen is in het Oud-Egyptische getalstelsel heel eenvoudig: je gooit van beide getallen gewoon alle symbolen op één hoop. Daarbij worden 10 eenheden vervangen door één tiental, 10 tientallen door één honderdtal, etc.

Het plaatje hieronder laat een voorbeeld zie van een Oud-Egyptische optelsom



Als ze twee getallen van elkaar moesten aftrekken dan deden de Egyptenaren dat door het kleinste van de twee aan te vullen tot het grootste. Eigenlijk net zoals veel mensen uitrekenen hoeveel geld je terug krijgt als je € 7,84 betaalt met een briefje van € 10,00: het is nog 6 cent tot € 7,90, dan nog 10 cent tot € 8,00 en tenslotte nog 2 euro tot het tientje is bereikt, dus het verschil is € 2,16.
De uitkomst van 4209 – 327 vonden ze dus door 327 aan te vullen tot 4209 was bereikt. Bijvoorbeeld zo:

- eerst 3 er bij tot 330;
- dan 70 erbij tot 400;
- dan 600 erbij tot 1000;
- dan 3000 erbij tot 4000;
- tenslotte nog 200 en 9 erbij tot 4209 was bereikt.

Zo vind je: 4209 – 327 = 3 + 70 + 600 + 3000 + 200 + 9 = 3000 + 800 + 70 + 12 = 3882.

Delen en vermenigvuldigen 'op z'n Egyptisch'

Egyptenaren vermenigvuldigden niet op de manier zoals wij die nu kennen. Een vermenigvuldiging werd tot herhaalde optelling teruggebracht. Ze gebruikten een verdubbelingtabel van het kleinste cijfer. Wanneer je twee getallen met elkaar vermenigvuldigt, dan gebruik je de verdubbelingstabel van het kleinste getal. Voor het uitrekenen van 7 keer 17 gebruik je de verdubbelingstabel van 7. De som van het aantal verdubbeling van 7 moet 17 zijn. Dat ziet er als volgt uit:

7 x 17 =	1	7
	2	14
	4	28
	8	56
	16	102

17 = 1 + 16
1 x 7 = 7 ; 16 x 7 = 102
7 + 102 = 109
7 x 17 = 109

Hieronder nog een voorbeeld:

5 x 21 =	1	5
	2	10
	4	20
	8	40
	16	80

21 = 1 + 4 + 16
1 x 5 = 5 ; 4 x 5 = 20 ; 16 x 5 = 80
5 + 20 +80 = 105
5 x 21 = 105

Het delen van een getal door het andere werkte op eenzelfde manier als het vermenigvuldigen 'op z'n Egyptisch'. Het is hetzelfde principe alleen dan andersom. In plaats van zich af te vragen, 'hoeveel is 750 gedeeld door 50', stelden de Egyptenaren zich de vraag, 'hoe vaak past 50 in 750'. Ook hierbij werd de verdubbelingstabel gebruikt. Nu moet de som van de rechterkolom gelijk zijn aan 750 en de som van het aantal vermenigvuldigingen geeft de uitkomst van de deling. 750 gedeeld door 50 ziet er dan als volgt uit:

1	50
2	100
4	200
8	400

750 = 50 + 100 + 200 + 400
1 + 2 + 4 + 8 = 15

$$\frac{750}{50} = 15$$

De Egyptenaren hadden ook uitkomsten voor delingen waarbij er een decimaal getal als uitkomst kwam, bijvoorbeeld $\frac{1079}{25} = 43\frac{4}{25} = 43{,}16$. Het enige verschil vergeleken met onze notatie was dat de Egyptenaren de breuk $\frac{4}{25}$ op een andere manier schreven, namelijk als $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{100}$. Deze manier (techniek) van breuknotatie wordt 'Egyptische breuken' genoemd, maar staat beter bekend als 'stambreuken'. Men breekt een breuk met teller groter dan 1 op tot breuken met teller 1. Het gaat dan als volgt: $\frac{n}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots$, waarbij de noemers a, b, c, ... steeds groter worden. Zie hieronder:

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = \frac{15}{100} + \frac{1}{100} = \frac{3}{20} + \frac{1}{100} = \frac{2}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{100}$$

Egyptische rollen

De Egyptenaren bewaarden hun notaties op papyrus. Van de Egyptische wiskunde is slechts weinig bewaard gebleven, want papyrus vergaat nu eenmaal. Alleen de Rhind Papyrus, de Moskou Papyrus en enkele andere papyrusrollen zijn min of meer bewaard gebleven.

De Rhind Papyrus is een enkele rol die een lengte van 5,4 meter en een breedte van 32 centimeter heeft (zie hierboven). De rol bevat 87 wiskundige problemen en hun oplossingen. Het gaat daarbij om rekenproblemen als het verdelen van een aantal broden over een aantal mensen, maar ook bijvoorbeeld over een methode om de oppervlakte van een driehoek te vinden.
Men weet dat Ahmes de schrijver was van het Rhind Papyrus.
Ahmes was een Egyptenaar die leefde van omstreeks 1680 v.Chr. tot omstreeks 1620 v.Chr.. Over hem en zijn leven is niets bekend.
Deze papyrusrol is in 1828 door de Schotse Egyptoloog Alexander Henri Rhind in Thebe gevonden. Sindsdien is het vrijwel de enige bron van onze kennis over de vroege Egyptische wiskunde en het oudst bekende document over wiskunde. Ahmes beweert op dit document een 200 jaar ouder document te hebben gekopieerd (uit ongeveer 1850 v.Chr.). Of Ahmes zelf een wiskundige was, is niet bekend. Maar hij moet er toch wel iets van hebben begrepen om deze papyrus te kunnen samenstellen.

De 2 eeuwen oudere 'Moskou Papyrus', is een rol van 4,57 m lang en 7,6 cm breed die 25 problemen en oplossingen bevat. Wie deze rol geschreven heeft is onbekend.

Rhind Papyrus

Een van de merkwaardigste kenmerken van het Rhind Papyrus was de $\frac{2}{n}$-tabel.

Deze tabel laat breukrekeningen zien waarbij $\frac{2}{n}$-breuken, met *n*- waarden die allen oneven zijn, worden omgezet in breuken met teller 1 (stambreuken, zie hoofdstuk *Delen en vermenigvuldigen* '*op z'n Egyptisch*'). Op de rol werd een symbool gebruikt boven het getal dat de $\frac{1}{.}$ (van $\frac{1}{n}$) verving, behalve bij $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$, hiervoor werd een speciaal teken gebruikt.
Ik maak in deze tekst gebruik van de huidige notatie.

Op de rol werden de oneven n-getallen 5 tot 101 op de volgende manier verwerkt:

n = 5 $\quad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

n = 7 $\quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

n = 13 $\quad \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

n = 15 $\quad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

Het Rhind Papyrus bevat problemen die je kunt onderverdelen in een aantal categorieën, zoals bijvoorbeeld: eenvoudige vergelijkingen, eenvoudige rijen, eenvoudige algebra en benadering van pi. Dit laatste komt terug in het hoofdstuk *Pi*; van de rest volgt hier een voorbeeld, te beginnen met een eenvoudig vergelijkingsprobleem (probleem 24).

Probleem 24:
Een hoeveelheid plus een zevende deel van die hoeveelheid is gelijk aan 19; wat is die hoeveelheid?

Oftewel: $x+\frac{1}{7}x=19$. Wat is x?

Onze oplossing zou zijn: $x=\frac{19}{1\frac{1}{7}}=\frac{19}{\frac{8}{7}}=\frac{133}{8}=16\frac{5}{8}$.

De Egyptenaren maken een tabel met verdubbelingen van 1 + 1/7:

1	$1+\frac{1}{7}$	
2	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	(zie 2/n-tabel)
4	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$	
8	$9+\frac{1}{7}$	
16	$18+\frac{2}{7}=18+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	(zie 2/n-tabel)
32	$36+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$	

De laatste verdubbeling ($36+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$) is groter dan 19 en hebben we dus niet nodig. Vervolgens vragen de Egyptenaren wat er nog bij de een na laatste stap ($18+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$) opgeteld moet worden om 19 te krijgen. Het antwoord $19-\left(18+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)$ wordt herleid tot $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$, want

$19-18-\frac{1}{4}-\frac{1}{28}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{28}=1-\frac{7}{28}-\frac{1}{28}=\frac{20}{28}$,

$\frac{20}{28}=\frac{14}{28}+\frac{6}{28}=\frac{1}{2}+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$.

Dan volgt de vraag wat er met $1+\frac{1}{7}$ vermenigvuldigd moet worden om $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$ te krijgen.

Het antwoord hierop is $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$, want

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{56}=\frac{1}{2}+\frac{7}{56}+\frac{1}{14}+\frac{1}{56}=\frac{1}{2}+\frac{8}{56}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}.$$

De oplossing is dus $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ en dat is gelijk aan $16\frac{5}{8}$.

Het volgende probleem is een voorbeeld van eenvoudige algebra.

Probleem 72:
100 broden van pesu10 moeten geruild worden voor een zeker aantal broden van pesu45. Wat is dat aantal?

Het pesu-nummer is omgekeerd evenredig: hoe lager het nummer hoe beter: pesu10 is dus sterker/beter dan pesu45.

Rekenkundig zou je aan pesu10 en pesu45 respectievelijk de waarden $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{45}$ kunnen koppelen. Met andere woorden: de verhouding pesu10/pesu45 is gelijk aan $\frac{45}{10}$.

In huidige wiskunde zou de vraag zijn: wat is $\frac{45}{10} \times 100$? Het antwoord luidt 450.

De Egyptische oplossing is als volgt:
Kijk eerst hoeveel meer 45 is dan 10. Dat is 35. Deel 35 door 10. Je krijgt $3+{}^{1}/_{2}$.
Vermenigvuldig vervolgens $3+{}^{1}/_{2}$ met 100. Je krijgt 350. Tel 100 op bij 350 en je krijgt 450.

Deze methode lijkt onhandig en vreemd, maar is algebraïsch wel correct.
Stel: x broden van pesu*P* moeten worden geruild tegen *y* broden van pesuQ.

Vereenvoudigd: x pesu*P* = *y* pesuQ, dan geldt $y = x \cdot \frac{Q}{P}$.

Volgens de Egyptenaren geldt dus: $y = x \cdot \frac{Q-P}{P} + x$ en dat is precies hetzelfde…

Tot slot, een welbekend voorbeeld van rijen.

Probleem 79:
Er zijn zeven huizen; in elk huis zijn er zeven katten; elke kat bespiedt zeven muizen; elke muis heeft zeven gerstgranen opgegeten; elke gerstgraan zou zeven maten gerst geproduceerd hebben. Wat is de som van alle opgenoemde dingen?

Huizen:	7		
Katten:	49		
Muizen:	343	1	2801
Gerstgranen:	2401	2	5602
Gerstmaten:	16807	4	11204
Totaal:	19607	Totaal:	19607

De eerste twee kolommen leiden tot de som van de vijf termen van de meetkundige rij met rede 7 en startwaarde 7: $7+7^2+7^3+7^4+7^5$. Terwijl de laatste twee kolommen de gebruikelijke methode voor het vermenigvuldigen van 7 x 2801 is. We zien dat beide uitkomsten gelijk zijn.

In de huidige wiskunde weten we dat de som van een meetkundige rij met n termen en rede r en startwaarde u_0 gelijk is aan:

$$u_0 + u_0 \cdot r + u_0 \cdot r^2 + ... + u_0 \cdot r^n = u_0\left(1 + r + r^2 + ... + r^n\right) = u_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

We hebben nu $u_0 = 7$, $r = 7$ en $n = 4$, dus

$$7 \cdot \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 7 \cdot \frac{16807 - 1}{7 - 1} = 7 \cdot \frac{16806}{6} = 7 \cdot 2801 = 19607.$$

Blijkbaar wisten de Egyptenaren de uitkomsten van de rij $1 + r + r^2 + ... + r^n$ (via een tabel?), want voor $r = 7$ geeft deze rij 2801. Met behulp van een verdubbelingstabel kun je dit dan vermenigvuldigen met 7.

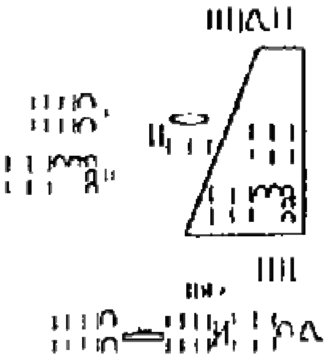
Probleem 79 laat zo dus een methode zien voor het berekenen van de somrij van een meetkundige rij.

Moskou Papyrus

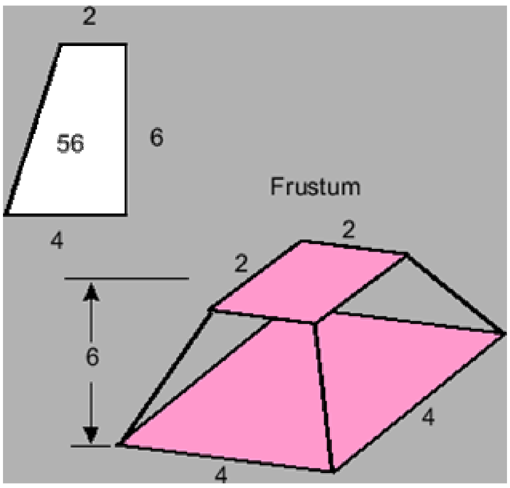
De Moskou Papyrus kenmerkt zich met problemen over afgeknotte vierkante piramides. Het gaat dan voornamelijk over het berekenen van de inhoud hiervan. Een bekend probleem uit deze rol is probleem 14, waarbij de inhoud van een afgeknotte piramide met een vierkant grondvlak moet worden berekend.

Probleem 14:
De opdracht luidt: bereken de inhoud van de afgeknotte piramide met vierkant grondvlak.

Het plaatje hieronder is de originele tekening van de Moskou Papyrus die hoort bij dit probleem.



Het plaatje hieronder is een moderne weergave.



De Egyptenaren rekenden als volgt:

$4 \times 4 = 16$ (oppervlakte ondervlak)
$4 \times 2 = 8$ (lengte ondervlak x lengte bovenvlak)
$2 \times 2 = 4$ (oppervlakte bovenvlak)

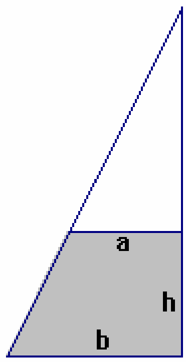
Optellen $16 + 8 + 4 = 28$
Neem $\frac{1}{3}$ van de hoogte, dus $\frac{1}{3}$ van $6 = 2$
Vervolgens 28 vermenigvuldigen met 2 geeft 56. En 56 is de oplossing!

Uit deze berekening blijkt dat de Egyptenaren op de hoogte waren van een formule van de inhoud van een afgeknotte piramide $I = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Hierbij is h de hoogte van de afgeknotte piramide, a de lengte van het ondervlak en b de lengte van het bovenvlak.

Ter controle : $I = \frac{1}{3}6\left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) = 56$

In de huidige wiskunde wordt een afgeknotte piramide berekend door de inhoud van de gehele piramide min de inhoud van de piramide die er afgeknot wordt. Ook met deze berekening kunnen we voor dit geval op deze formule komen.



De afgeknotte piramide heeft een vierkant grondvlak met zijde b, een vierkant bovenvlak met zijde a en hoogte h. In de figuur gaat het om het grijze deel.
Voor de niet-afgeknotte piramide komt er nog een hoogte x bij. De totale hoogte van de niet-afgeknotte piramide is dus $h + x$.
Voor de inhoud van de afknotte piramide kunnen we de inhoud berekenen van de totale niet-afgeknotte piramide minus de kleine (in de figuur witte) piramide die eraf geknot wordt.
Voor het gemak noem ik de inhoud van de totale piramide I_t, de inhoud van de kleine I_k en de inhoud van de afgeknotte I_a.

Dus: $I_a = I_t - I_k = \left(\frac{1}{3}b^2(h+x)\right) - \left(\frac{1}{3}a^2 x\right)$.

Door gelijkvormigheid van de totale piramide en de kleine piramide, geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{x+h}.$$

Hieruit volgt: $x = \frac{ah}{b-a}$, want:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{x+h}$$
$$a(x+h) = bx$$
$$ax + ah = bx$$
$$ah = bx - ax = (b-a)x$$
$$x = \frac{ah}{b-a}$$

Nu kan x in de inhoudsformule dus vervangen worden. Er volgt:

$$I_a = I_t - I_k = \left(\frac{1}{3}b^2(h+x)\right) - \left(\frac{1}{3}a^2 x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}b^2\left(h + \frac{ah}{b-a}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}a^2 \frac{ah}{b-a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}b^2 h + \frac{1}{3}b^2 \frac{ah}{b-a} - \frac{1}{3}a^2 \frac{ah}{b-a}$$

$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + \frac{ab^2}{b-a} - \frac{a^3}{b-a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + \frac{ab^2 - a^3}{b-a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + \frac{a(b^2 - a^2)}{b-a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + \frac{a(b+a)(b-a)}{b-a}\right)$$

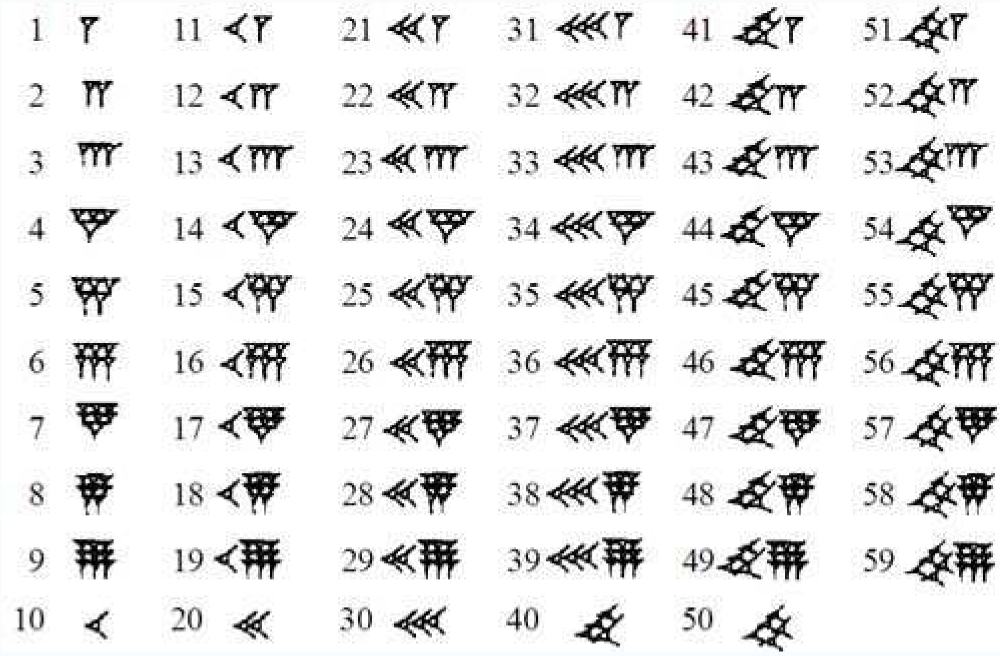
$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + a(b+a)\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(b^2 + ab + a^2\right)$$

Met de huidige algebra komen we dus op dezelfde algemene formule voor de inhoud van een afgeknotte piramide met vierkant grondvlak met zijde b, vierkant bovenvlak met zijde a en hoogte h, namelijk: $I = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Babylonische Wiskunde

De Babyloniërs kenden de symbolen voor getallen die wij nu in de wiskunde gebruiken nog niet. Zij gebruikten spijkerschrift in hun wiskunde. Alles werd op kleitabletten gegrift. In het volgende overzicht wordt duidelijk hoe de Babyloniërs ‘onze cijfers’ in spijkerschrift noteerden. (𒁹= spijker) (𒌋= winkelhaak)



Het is dus duidelijk dat 𒁹 voor 1(in feite 60^0) staat en 𒌋 voor 10.

Je ziet dat de tabel stopt bij 59. Iedereen zou het volgende symbool verwachten bij het getal 60: ‘𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋’, maar dit blijkt niet zo te zijn. Het symbool voor het getal 60 blijkt namelijk hetzelfde symbool te zijn als voor het getal 1, ‘𒁹’. Dit wil dus zeggen dat het Babylonische getalstelsel een zestigtallig stelsel is, in tegenstelling tot ons tientallig stelsel. Dit noemen we ook wel een sexagesimaal stelsel. Dit systeem kennen wij aardig goed, namelijk van de tijdrekening, de klok.

Over Talstelsels

Wij hebben een talstelselsysteem waarbij de plaats van het cijfer de waarde bepaalt, ook wel ‘positiestelsel’ genoemd.
Neem bijvoorbeeld het getal 1651, dan staat de eerste 1 voor 1000 (1×10^3), de 6 voor 600 (6×10^2), 5 voor 50 (5×10^1) en 1 voor 1 (1×10^0).

Wij gebruiken dus 10 als basis van ons positiestelsel; we werken met machten van 10. Het Babylonische talstelsel kent ook een positiestelsel. Een die erg veel op die van ons lijkt, alleen dan met 60 als basis. Voor getallen boven de 59 gaat de positie van de symbolen ook een rol spelen. Zij werkten dus met machten van 60.
Een ander verschil, misschien nog wel belangrijker, is dat de Babyloniërs het getal nul nog niet kenden. Ik kom hier later op terug.

In het vorige hoofdstuk heb ik verteld dat het symbool staat voor 1 maar ook voor 60, sterker nog het staat ook voor 60^2, 60^3 enz..

Getallen boven de 60 zien er dan als volgt uit:

Het getal 150: 

Het getal 130: 

Het getal 180: 

Het omrekenen van onze getallen naar Babylonische schrijfwijze komt neer op kijken hoe vaak 60 (of een hogere macht van 60) in het getal past. Bijvoorbeeld het getal 150 is $2 \times 60 + 30$ en wordt daarom .

Om het een stuk gemakkelijker voor jezelf te maken schrijven we in plaats van ‘spijkers’ en ‘winkelhaken’ onze eigen cijfers op.
Het Babylonische getal  noteer ik als 1:35. Dit is dus 1 zestigtal plus 35 eenheden. Deze notatie 1:35 wordt een transcriptie genoemd. Deze notatie kennen wij van de magnetron. Als wij een bekertje melk 95 seconden willen verwarmen toets je 1:35 in. Zo zullen we dus 63 noteren als 1:03 en 150 als 2:30

Een paar oefeningen ter verduidelijking:

1:35 + 1:03 = 2:38
(95   +   63 = 158)

2:38 + 1:22 = 4:00
(158 +   82 = 240)

10:34 – 5:59 = 4:35
(634   – 359 = 275)

Dit kunnen we ook weer uitbreiden. Het Babylonische getal  , in transcriptie 2:26:30, staat voor (2×60^2) + (26×60^1) + (30×60^0) = 8790

Zo staat  niet voor 12 maar voor $2 \times 60^3 + 6 \times 60^2 + 3 \times 60^1 + 1 \times 60^0$ en is dus gelijk aan 453781.
Ten minste, dat is één mogelijke interpretatie. De Babyloniërs kenden namelijk geen symbool voor het getal *nul*. Dit zorgt voor dubbelzinnigheid of ‘meerzinnigheid’ hetgeen wil zeggen dat je het op verschillende manier zou kunnen zien.

Het getal nul heeft een belangrijke rol in een positiestelsel. Het geeft namelijk aan dat er van een macht geen waarde is. Ik neem als voorbeeld bijvoorbeeld het getal 205. Bij ons systeem wil dit zeggen dat er 2 honderdtallen en 5 eenheden zijn, maar er geen tiental is.

Staat er in spijkerschrift: ‘’ dan zijn er meerdere interpretaties mogelijk. Het kan bijvoorbeeld $2 \times 60 + 5 = 125$ zijn, of $2 \times 60^2 + 0? + 5 = 7205$, of $2 \times 60^2 + 5 \times 60^1 + 0 \times 60^0 = 7500$, …
En zo zijn er nog veel meer mogelijkheden.

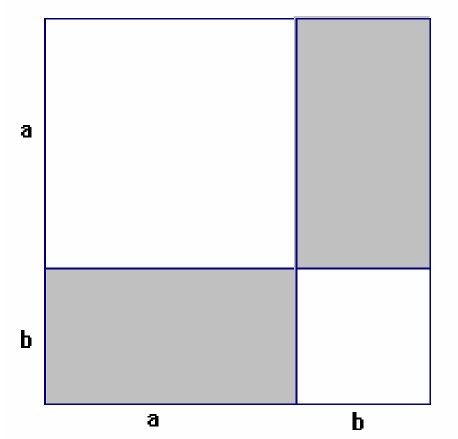
De ruimte tussen de symbolen geeft niet aan hoe ‘groot’ ze is. De ruimte geeft stapgrootte van een macht van 60 aan, alleen onduidelijk is hoevéél stappen. Meestal blijkt uit het verband (bijvoorbeeld in tabellen) welk getal is bedoeld of waar eigenlijk nul zou moeten staan. Maar dit is zeker niet ideaal.

Babylonische Rekenkunst

Naast het optellen en aftrekken, kenden de Babyloniërs ook het vermenigvuldigen, delen en machtverheffing. Wij gebruiken in feite maar 9 tafels met 10 producten (de tafels 1 t/m 9 en de producten 1 t/m 10). Wij hoeven in totaal maar 90 producten uit ons hoofd te kennen. De Babyloniërs gebruikten naar analogie 59 tafels met 23 producten. De tafels 1 t/m 59 met de producten 1 t/m 20, 30, 40 en 50 (zoals ik al eerder verteld heb). Logisch dat alles op kleitabletten werd bewaard en daarmee gerekend werd.
Zo was er ook een kwadratentabel, deze loopt ook van 1 t/m 59. Zie hier de tabel (gedeeltelijk ingevuld):

n	n²	n	N²	n	n²	n	n²	n	n²	n	n²
1	1	11	2:01	21	7:21	31	16:01	41	28:01	51	43:21
2	4	12	2:24	22	8:04	32	17:04	42	29:24	52	45:04
3	8	13	2:49	23	8:49	33	18:09	43	30:49	53	
4	16	14	3:16	24	9:36	34	19:16	44		54	
5	25	15	3:45	25	10:25	35		45		55	
6	36	16	4:16	26		36		46		56	
7	49	17	4:49	27		37		47		57	
8	1:04	18	5:24	28		38		48		58	
9	1:21	19	6:01	29		39		49		59	
10	1:40	20	6:40	30		40		50			

De Babyloniërs gebruikten ook de kwadratentabel om een vermenigvuldiging van 2 ongelijke getallen op te lossen:
Hieronder wordt de vermenigvuldiging van *ab* uitgeschreven in kwadraten.



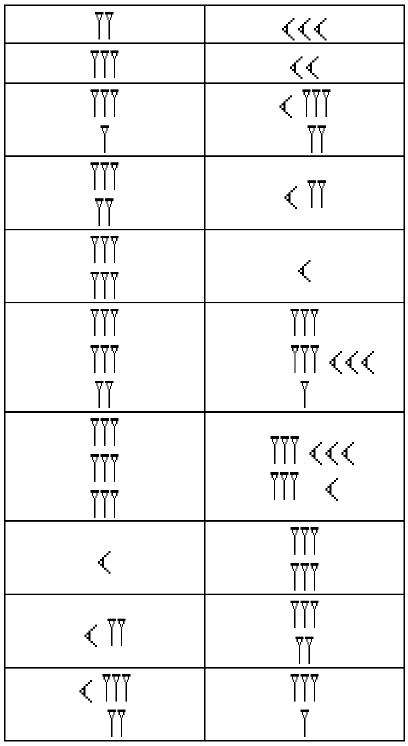
De oppervlakte van één grijze rechthoek is ab.
De oppervlakte van het grote vierkant is $(a+b)^2$.
Nu: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.
Dus geldt dat de oppervlakte van één grijze rechthoek gelijk is aan $\frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$.
Hiermee is de vermenigvuldiging ab uitgeschreven in kwadraten.

Ik neem de vermenigvuldiging van 15 keer 10 als getallenvoorbeeld.
15 + 10 = 25
25 x 25 = 625, 15 x 15 = 225, 10 x 10 = 100
225 +100 =325
625 – 325 = 300
De helft van 300 is 150
Dus: 15 x 10 = 150

De kwadratentabel gaat niet verder dan het kwadraat van 59. Om de kwadraten van grotere getallen te berekenen werkte men als volgt:

Als voorbeeld neem ik het kwadraat van 75, in transcriptie 1:15
1:15 ; splitsen a = 1:00 + b = 15
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(1{:}15)^2 = 1{:}00^2 + 2 \times 1{:}00 \times 15 + 15^2$
$= 1{:}00{:}00 + 30{:}00 + 3{:}45$
$= 1{:}33{:}45 = 5625 = 75^2$

Hieronder staat een Babylonische tabel.



De regelmaat die je in de tabel vindt (zou men zeggen) is links x rechts = 60.

2 x 30 = 60
3 x 20 = 60
4 x 15 = 60

Maar je ziet dat bij 8 en 9 het niet meer klopt, en dat klopt! Het is namelijk geen vermenigvuldigingstabel maar breukentabel en omdat het getal nul geen teken had zou het product van kolom 1 en 2 in plaats van 60 ook 1 kunnen zijn, en dat is het dus ook!
Naast 2 staat dus in de rechterkolom geen 30 maar 0,30 in transcriptie. Hier dus geen dubbele punt bij transcriptie maar een komma om aan te geven dat het kleiner dan 1 is. Het getal 0,30 in transcriptie staat dus voor ½, want 0,30 is 30 x 60^{-1} = ½.

De tweede rij bevat dus de getallen 3 en 0,20 in transcriptie (0,20 = 20 x 60^{-1} = ⅓) en dus 3 en ⅓.

Als we dan bij rij 6 aankomen, staan de symbolen 8 en 7,30 in transcriptie.
Het getal 7,30 in transcriptie komt overeen met 7 x 60° + 30 x 60^{-1} = 7 + 0,5 = 7,5. Dit getal moet vanwege de rechterkolom vermenigvuldigd worden met 60^{-1} en is dus gelijk aan 7,5 x 60^{-1} = ⅛.

Het is best bijzonder dat de Babyloniërs met sexagesimale breuken konden werken. Decimale breuken werden namelijk pas aan het eind van de zestiende eeuw geïntroduceerd in Europa door voornamelijk Simon Stevin. Dit is een uitbreiding op het positiestelsel.

In het tientallig stelsel betekent dat bijvoorbeeld 3802,45 gelijk is aan:

$(3 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (4 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2})$

Het getal 3802,45 zouden we kunnen schrijven als:
$(1 \times 60^2) + (3 \times 60^1) + (22 \times 60^0) + (27 \times 60^{-1})$.
In transcriptie wordt dat dan 1:03:22,27

Er komt een komma in transcriptie op de plaats waar wij ook een komma zouden zetten.
Als we deze notatie toepassen op de tabel van omgekeerden, dan komt die er uit te zien zoals de tabel hieronder:

n	n^{-1}	N	n^{-1}	n	n^{-1}
2	0,30	16	0,03:45	45	0,01:20
3	0,20	18	0,03:30	48	0,01:15
4	0,15	20	0,03	50	0,01:12
5	0,12	24	0,02:30	54	0,01:06:40
6	0,10	25	0,02:24	1:00	0,01
8	0,07:30	27	0,02:13:20	1:04	0,00:56:15
9	0,06:40	30	0,02	1:12	0,00:50
10	0,06	32	0,01:52:30	1:15	0,00:48
12	0,05	36	0,01:40	1:20	0,00:45
15	0,04	40	0,01:30	1:21	0,00:44:26:40

Als je nou een breuk hebt en je wilt die omzetten in transcriptie dan moet dat volgens de volgende manier.

Ik neem als voorbeeld $\frac{1}{25}$:

$$\frac{1}{25} = \frac{60}{25 \cdot 60} = \frac{25 \cdot 2}{25 \cdot 60} + \frac{10}{25 \cdot 60} = \frac{2}{60} + \frac{10 \cdot 60}{25 \cdot 60^2} = \frac{2}{60} + \frac{600}{25 \cdot 60^2} = \frac{2}{60} + \frac{24}{60^2}$$

Dus $\frac{1}{25}$ is in transcriptie 0,02:24.

De bedoeling is om je breuk zo om te schrijven dat je een breuk krijgt waarin de noemer 60 is ($= 60^{-1}$) en eventueel optellen met andere breuken waarbij de volgende breuk als noemer 60^2 ($=60^{-2}$) heeft, de volgende 60^3 ($=60^{-3}$) als noemer, enzovoort.

Een voorbeeld met een teller groter dan 1:

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 60}{24\cdot 60}=\frac{24\cdot 17}{24\cdot 60}+\frac{12}{24\cdot 60}=\frac{17}{60}+\frac{720}{24\cdot 60^2}=\frac{17}{60}+\frac{30}{60^2}$$

Dus $\frac{7}{24}$ is in transcriptie 0,17:30.

Als je eenmaal weet wat de uitkomst is van 1/25 (0,02:24) kun je er heel gemakkelijk en snel achter komen wat 3/25 of 17/25 is bijvoorbeeld. De Babyloniërs maakten hiervan kleitabletten.
Een stukje van de vermenigvuldigingstabel van 1/25 ziet er dan als volgt uit:

$\frac{1}{25}$ wordt 0,02:24
$\frac{2}{25}$ wordt 0,04:48
$\frac{3}{25}$ wordt 0,07:12
$\frac{4}{25}$ wordt 0,09:36
$\frac{5}{25}$ wordt 0,12

Met deze informatie kan ik nu terug komen op de tabel van omgekeerden. Het kan opgevallen zijn dat er een aantal getallen missen in de tabel. De eerste die we missen is 7. Het volgende gebeurt namelijk als je $\frac{1}{7}$ in sexagesimale getallen probeert te schrijven:

$$\frac{1}{7}=\frac{60}{7\cdot 60}=\frac{7\cdot 8}{7\cdot 60}+\frac{4}{7\cdot 60} \qquad \text{(I)}$$
$$=\frac{8}{60}+\frac{240}{7\cdot 60^2}=\frac{8}{60}+\frac{7\cdot 34}{7\cdot 60^2}+\frac{2}{7\cdot 60^2} \qquad \text{(II)}$$
$$=\frac{8}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{120}{7\cdot 60^3}=\frac{8}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{7\cdot 17}{7\cdot 60^3}+\frac{1}{7\cdot 60^3} \qquad \text{(III)}$$
$$=\frac{8}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{7\cdot 17}{7\cdot 60^3}+\frac{60}{7\cdot 60^4} \qquad \text{(IV)}$$

Stap (IV) eindigt met een breuk met teller 60. In regel (I) zijn we begonnen met een breuk met teller 60. Als we nu verder zouden gaan, treedt er dus een herhaling op.

Dit noemen we ook wel een 'oneindig voortlopende en repeterende breuk' (er is geen einde aan het aantal decimalen en een groep decimalen blijft zich maar herhalen).
De Babyloniërs gebruikten, indien nodig, ook benaderingen van oneindig voortlopende breuken.

Babylonische vierkantsvergelijkingen

Babyloniërs waren erg bedreven in het oplossen van vergelijkingen. In het onderdeel meetkunde spelen probleemstellingen met lengte, breedte en oppervlakte de hoofdrol.
Als eerste geef ik een voorbeeld om de Babylonische standaardmethode toe te lichten. Dit voorbeeld komt dus niet letterlijk van een kleitablet af.

Van een rechthoek is de oppervlakte 65 en de som van de lengte en breedte is 18. Hoe groot zijn lengte en breedte?

Dus als de lengte x is en de breedte y, dan moet gelden: $x \cdot y = 65$ en $x + y = 18$.

De Babyloniërs berekenden dit als volgt.

$x = 9 + d$
$y = 9 - d$

Waarbij de 9 komt van $\frac{1}{2}(x+y)$.

$x \cdot y = (9+d)(9-d) = 81 - d^2 = 65$

$d^2 = 81 - 65 = 16$

$d = 4$

$x = 9 + 4 = 13$

$y = 9 - 4 = 5$

Deze berekening hebben de Babyloniërs waarschijnlijk als volgt gevonden:
$x + y = 18$
Als de rechthoek vierkant zou zijn dan zouden x en y gelijk zijn:
$x = 9$, $y = 9$
Maar dan is $x \cdot y = 9 \cdot 9 = 81$ en dat moet 65 zijn. Dat is dus 16 teveel (81 – 65 = 16).
Dat klopt niet. Dus de één moet groter zijn dan de andere; x en y zijn ongelijk.
Maar de lengte is wel evenveel meer als dat de breedte minder is (zie het getal d).
Vanaf de gelijke x en y gezien (de 9) komt er bij de lengte 4 bij en gaat er bij de breedte 4 af.

De manier waarop de meeste wiskundigen van nu een dergelijk probleem zouden oplossen is als volgt:

$x \cdot y = 65$

$x + y = 18$, dus $y = 18 - x$ en invullen in de vergelijking hierboven:

$x \cdot (18 - x) = 65$

$18x - x^2 = 65$

$x^2 - 18x + 65 = 0$

$(x-5)(x-13) = 0$

$x = 5$ of $x = 13$

Bij $x = 5$ hoort $y = 13$ en bij $x = 13$ hoort $y = 5$.

Een maximaal product van zo'n probleemstelling:

$$x \cdot y = p$$
$$x + y = s \qquad \max p = \left(\frac{1}{2}s^2\right)$$

Dit is het geval wanneer het een vierkant is, in plaats van een rechthoek en dus x en y gelijk zijn aan elkaar: $x = y$.

Een generalisatie van de Babylonische methode ziet er als volgt uit:

Als:
$$x + y = s$$
$$x \cdot y = p$$

Dan:
$$x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$
$$y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$

Dit valt op deze manier te verklaren:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s + d \\ y &= \frac{1}{2}s - d \end{aligned} \quad \text{als } x > y.$$

$$x \cdot y = \left(\frac{1}{2}s + d\right)\left(\frac{1}{2}s - d\right) = p$$
$$x \cdot y = \frac{1}{4}s^2 - d^2 = p$$
$$d^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$$
$$d = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$

Hierbij geldt $\frac{1}{4}s^2 \geq p$ of $s^2 \geq 4p$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p} \\ y &= \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p} \end{aligned} \quad \text{als } x > y.$$

Een ander probleem: 'Bereken twee getallen (x *en* y *) waarvan het verschil en het product gegeven zijn'.*

Bijvoorbeeld: het verschil van twee getallen is 10, het product 459.
Dus : $x \cdot y = 459$ en $x - y = 10$ (er van uitgaande dat $x > y$).

Het getal m is het getal dat exact in het midden ligt van de waarden x en y .
Dus $x = m + 5$ en $y = m - 5$.

$$x \cdot y = 459$$
$$(m+5)(m-5) = 459$$
$$m^2 - 25 = 459$$
$$m^2 = 459 + 25 = 484$$
$$m = 22$$

De oplossing is dus :

$$x = 22 + 5 = 27$$
$$y = 22 - 5 = 17$$

Ter controle: $27 \cdot 17 = 459$ en $27 - 17 = 10$.

In het algemeen wordt dit dan als volgt.

Als: $x - y = v$ en $x \cdot y = p$

Dan: $x = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + p} + \frac{1}{2}v$ *en* $y = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + p} - \frac{1}{2}v$

Dit valt op deze manier te verklaren:

$$x = m + \frac{1}{2}v$$
$$y = m - \frac{1}{2}v$$
$$x \cdot y = \left(m + \frac{1}{2}v\right)\left(m - \frac{1}{2}v\right) = m^2 - \frac{1}{4}v^2 = p$$
$$p = m^2 - \frac{1}{4}v^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4}v^2 + p \Rightarrow m = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + p}$$

Dus, als $x > y$:

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + p} + \frac{1}{2}v$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + p} - \frac{1}{2}v$$

En zo zijn er allemaal varianten op dit soort probleemstellingen die allemaal volgens hetzelfde principe werken. Feit blijft dat de Babyloniërs erg goed waren in het oplossen van ingewikkelde vergelijkingen met twee onbekenden.

Griekse Wiskunde

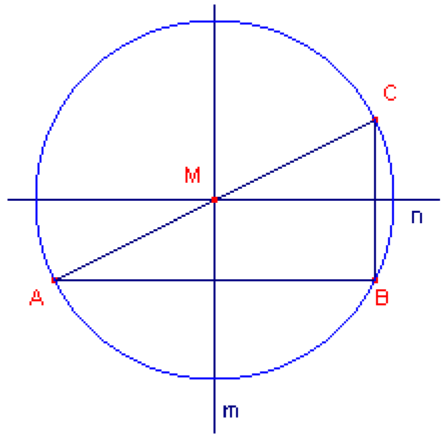
Rond 300 v.Chr. vinden we de eerste sporen van de studie der wiskunde in Griekenland. Het voornaamste doel van deze studie was om de plaats van de mens in het heelal op redelijke wijze te begrijpen. Volgens de overlevering is de 'brenger' van deze Griekse wiskunde Thales van Milete. Er bestaan geen bronnen waaruit we de vroege ontwikkelingen van de Griekse wiskunde kunnen bestuderen. Wel beschikken we over betrouwbare uitgaven van Euklides, Archimedes, Opollonios en nog een aantal grootheden binnen de Griekse wiskunde. Van de Griekse periode kunnen we niet echt een doorlopende ontwikkeling van de wiskunde vaststellen. Wel zijn er een aantal grote Griekse wiskundigen geweest die een grote bijdrage hebben geleverd aan de ontwikkeling van de wiskunde. Wiskunde die tot op heden nog gebruikt wordt. In feite kunnen we zeggen dat de geschiedenis van de Griekse wiskunde uit periodes bestaat waarin grote wiskundigen de hoofdrol spelen.

De volgende hoofdstukjes behandelen respectievelijk Thales, Pythagoras, Eudoxus, Euklides en Archimedes.

Thales

Thales van Milete was de 'vader' van de Griekse wiskunde, een koopman die zijn geld en wijsheid had verkregen in verre landen zoals Babylon en Egypte. Hij leefde van 624 - 547 v.Chr. en was een veelzijdige man: niet alleen een wetenschapper, maar ook een politicus. Er is niet heel veel bekend over zijn wiskundige bijdrage naast de beroemde 'Stelling van Thales' en de 'Omgekeerde stelling van Thales'.

Stelling van Thales
Als hoek B in driehoek ABC recht is, dan ligt B op de cirkel met middellijn AC.

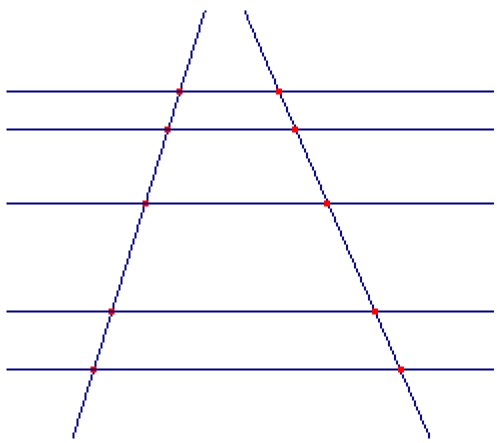


In deze figuur hebben we:
- driehoek ABC waarvan hoek B recht is;
- m is de middelloodlijn van AB, n is de middelloodlijn van CB.

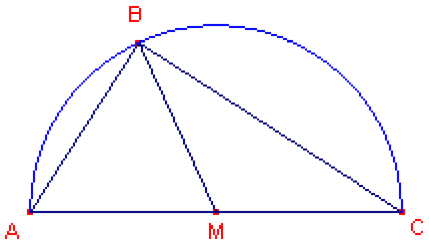
Omdat m evenwijdig is aan CB en door het midden gaat van AB, gaat m ook door het midden M van AC (stelling van de middenparallel; zie de stelling hieronder).
Hetzelfde geldt voor de lijn n.
Voor het punt M geldt dus MA = MB en ook MC = MB.
M ligt dus op gelijke afstanden van A, B, C.
M is dus middelpunt van de omgeschreven cirkel driehoek ABC.

De stelling die in het bewijs is aangegeven met "stelling van de middenparallel", wordt soms ook wel naar Thales genoemd, maar dan in een wat algemenere vorm:

Stelling van de middenparallel
Evenwijdige lijnen snijden van twee lijnen evenredige stukken af.



Omgekeerde stelling van Thales
Als B op de cirkel met middellijn AC ligt, dan is hoek B in driehoek ABC recht.



In deze figuur is M het midden van het lijnstuk AC.
M is het middelpunt van de cirkel met straal MA.
Het punt B is een punt van deze cirkel.

We zullen nu bewijzen dat hoek B een rechte hoek is.
Omdat MA = MB zijn de hoeken MAB en MBA gelijk.
Omdat MC = MB, zijn de hoeken MBC en MCB gelijk.
De som van deze hoeken is gelijk aan 180°. De hoeken MBA en MBC zijn dus samen 90°.
Met andere woorden, hoek B is een rechte hoek.

Pythagoras

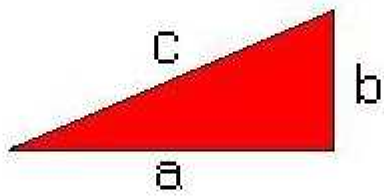
De tweede belangrijke Griek was Pythagoras. Hij was de eerste echte wiskundige en verder een bekend filosoof met een eigen 'school'. Hij leefde in de zesde eeuw rond 580 vChr. en is afkomstig van het Griekse eiland Samos. Omstreeks 520 v.Chr. verhuisde hij naar Croton waar hij zijn beroemde filosofische school stichtte. Zijn naaste volgelingen kregen les van hem. Pythagoras en de 'Pythagoreërs' waren daarbij voornamelijk geïnteresseerd is het begrip getal, het begrip figuur, het begrip bewijs. Zij behandelden die voor het eerst als abstracte begrippen. Omdat zijn 'school' door zowel geheimhouding als sterke samenwerking werd gekarakteriseerd, is er geen onderscheid te maken tussen zijn werk en dat van zijn volgelingen.

Tegenwoordig kennen we Pythagoras vooral vanwege de beroemde Stelling van Pythagoras. Hij (of één van zijn volgelingen) bewees dat de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek, gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.

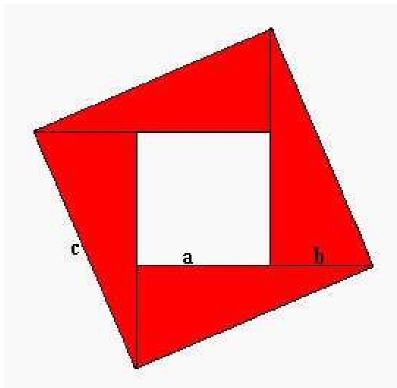
Behalve met wiskunde hield Pythagoras zich ook bezig met astronomie en muziek. Hij ontdekte dat een trillende snaar harmonische tonen produceert als de verhoudingen van de snaarlengtes gehele getallen zijn.

De stelling van Pythagoras
De schuine zijde in het kwadraat is gelijk aan de som van het kwadraat van de rechthoekzijden: $a^2 + b^2 = c^2$.

Om de stelling van Pythagoras te kunnen bewijzen, nemen we eerst 4 gelijke rechtbenige driehoeken zoals deze hieronder.



Door deze 4 driehoeken te draaien passen ze zo in elkaar dat het een vierkant wordt.



Als de oppervlakte van het hele figuur willen berekenen, kunnen we dat op twee manieren doen:

- $c \times c = c^2$
- de oppervlakte van 4 driehoekjes + de oppervlakte van het witte vierkantje in het midden: de oppervlakte van 1 driehoekje is: $½ \times a \times b$, maar we moeten het van 4 driehoekjes weten: dus $4 \times ½ \times a \times b = 2ab$. De oppervlakte van het witte vierkantje in het midden: $(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$.
  Dus de totale oppervlakte wordt dan: $2ab - (a - b)^2$.

De ene oppervlakte is natuurlijk even groot als de andere oppervlakte, dus:

$$c^2 = 2ab - (a - b)^2$$

Als we dit uitwerken krijgen we:

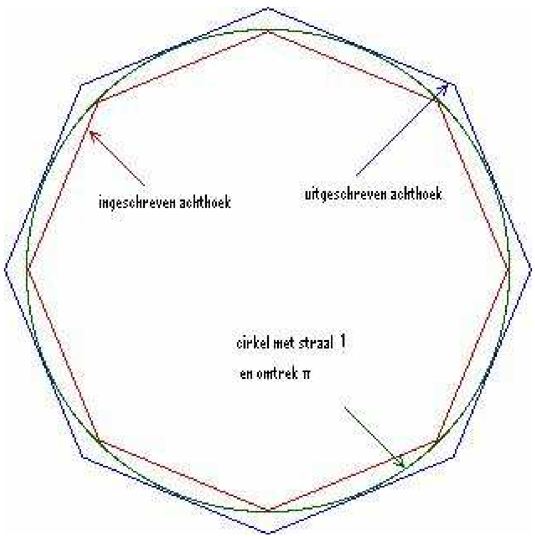
$$c^2 = 2ab + (a - b)^2$$
$$c^2 = 2ab + (a - b)(a - b)$$
$$c^2 = 2ab + a^2 - ab - ab + b^2$$
$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + 2ab - 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Eudoxus

Na Pythagoras kwam Eudoxus, een Griekse wiskundige uit de stad Cnidos. Hij leefde van 408 - 355 vChr. en reisde in zijn jonge jaren naar Tarentum waar hij studeerde bij de Pythagoreërs. Ook studeerde hij enkele maanden filosofie bij Plato in Athene en ging hij een jaar naar het Egyptische Heliopolis waar hij bij de priesters van de farao de astronomie beoefende.
Daarna keerde hij terug naar Klein-Azië naar de stad Cyzicos, waar hij net zoals Pythagoras een eigen school stichtte die nogal bekend werd. Samen met een aantal volgelingen ging hij in 368 v.Chr. nog een keer naar Athene om Plato te bezoeken. Eudoxus had geen hoge pet op van Plato's analytische vermogens en Plato op zijn beurt was niet erg ingenomen met Eudoxus' populariteit.
Uiteindelijk ging Eudoxus terug naar zijn geboortestad Cnidos waar hij een baan in het ambtelijk apparaat van het stadsbestuur kreeg. Kennelijk had hij daar tijd genoeg voor verdere studie in de wiskunde en de astronomie en hij publiceerde er veel van zijn ideeën. Hij bleef er tot zijn dood.
Zijn belangrijkste bijdrage op het gebied van de wiskunde is het bedenken van de "*Uitputtingsmethode*", een manier om de oppervlakte en de inhoud van allerlei voorwerpen te benaderen. Het was eigenlijk een voorloper van het integreren, wat pas veel later in de 17de en de 18de eeuw een wiskundige basis kreeg.

De Uitputtingsmethode

Het principe van deze methode is dat in een cirkel geschreven veelhoek steeds meer op een cirkel gaat lijken naarmate het aantal hoeken wordt vergroot. Ook werkte hij met een uitgeschreven veelhoek en bewees dat de oppervlakte van de cirkel tussen de oppervlaktes van de veelhoeken moest liggen. Deze methode is de voorloper van die van Archimedes die hiermee de waarde van pi benaderde (zie ook het hoofdstuk over pi).



Eudoxus paste vergelijkbare methoden toe om aan te tonen dat:

- de inhoud van een piramide met een vierkant grondvlak precies het derde deel is van een balk met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte;
- de inhoud van een kegel met een cirkelvormig grondvlak precies het derde deel is van een cilinder met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte;
- enzovoorts...

Euklides

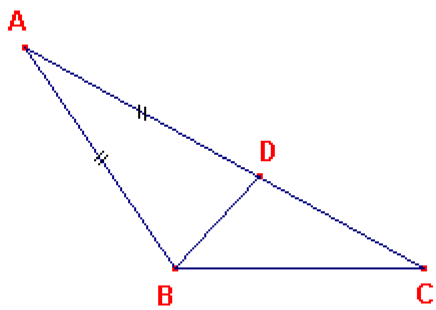
Euklides was een Grieks wiskundige van omstreeks 300 v.Chr. Over zijn leven is vrijwel niets bekend. Hij was pensionaris van het Museum van Alexandrië.
Euklides besteedde veel van zijn tijd aan het maken van een overzicht van de toen bekende wiskunde in 13 boeken, die bekend zijn als "*De elementen van Euklides*".
Tweeduizend jaar lang was dit één van de belangrijkste prestaties van de mensheid. In de westerse wereld is dit werk het meest gereproduceerd en bestudeerd, op de bijbel na.
Beroemd is zijn antwoord op een vraag van Ptolemeos of wiskunde nu niet sneller te leren zou zijn dan door het doorworstelen van die 13 boeken: "Er is geen koninklijke weg naar de wiskunde."
Een andere vraag die hem volgens de overlevering werd gesteld is wat voor nut die wiskunde nu allemaal heeft. Waarop Euklides zou hebben geantwoord: "Geef die man drie geldstukken, hij wil per sé voordeel halen uit wat hij heeft geleerd."

De Elementen van Euklides

De eerste vier boeken behandelen de vlakke meetkunde, met uitzondering van de leer van verhoudingen, het voeren van elementaire stellingen en constructies over stelling die te maken hebben met lijnen en hoeken tot de gelijkheid en gelijkvormigheid van driehoeken, de gelijkheid van oppervlakken, de cirkel en de regelmatige veelhoeken. De stelling van Pythagoras en de gulden snede komen er wel in voor als eigenschappen van oppervlakken.

Ik geef een paar voorbeelden uit de Elementen van Euklides.

Voorbeeld 1: Propositie I-18
Zij ABC een driehoek waarvan de zijde AC groter is dan AB. Ik zeg dat de hoek ABC ook groter is dan de hoek BCA.

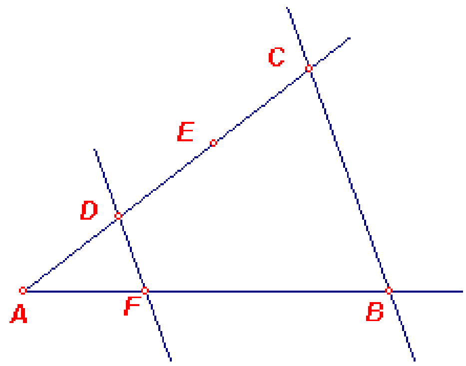


Laat nu, daar AC groter is dan AB, AD gelijk gemaakt zijn aan AB en laat BD verbonden zijn.
Daar de hoek ADB een buitenhoek is van de driehoek BCD, is deze hoek groter dan de niet-aanliggende binnenhoek DCB.
Maar de hoek ADB is gelijk aan de hoek ABD, omdat de zijde AB gelijk is aan AD; daarom is de hoek ABD ook groter dan de hoek ACB; daarom is de hoek ABC veel groter dan de hoek ACB.

Daarom is de hoek ABC groter dan de hoek BCA.

Voorbeeld 2: Propositie VI - 9
Van een gegeven rechte een voorgeschreven deel af te nemen.

De gegeven rechte is AB. Men moet van AB een gegeven deel afsnijden. Voorgeschreven is het derde deel.



Men trekt vanuit A onder een willekeurige hoek met AB de lijn AC, kiest op AC een willekeurig punt D, maakt DE en EC gelijk aan AD, trekt BC en hiermee evenwijdig DEF door D.
Omdat in driehoek ABC FD//BC getrokken is, geldt: CD : DA = BF : FA. Nu is CD = 2DA, dus ook BF = 2FA, en dus BA = 3AF.
Dus heeft men van de gegeven rechte AB het voorgeschreven deel, namelijk AF, afgesneden.
Hetgeen te construeren was. Dus heeft men van de gegeven rechte AB het voorgeschreven deel, namelijk AF, afgesneden.
Hetgeen te construeren was.

In het vijfde boek vinden wij de leer van de verhoudingen van Eudoxus, die geen verschil kent tussen onderling meetbare en onmeetbare grootheden. Deze leer wordt dan in het zesde boek op de gelijkvormigheid van vlakke figuren aangewend. Ook vinden we in het zesde boek het eerste maximumvraagstuk dat algebraïsch uitgedrukt wordt en laat zien dat ; $ax – \lambda x^2$ voor $x = a/2\lambda$ haar grootste waarde bereikt, zodat van alle rechthoeken met gelijke omtrek het vierkant de grootste oppervlakte heeft.

Het zevende, achtste en negende boek zijn gewijd aan de getallentheorie. Ook hier vindt men de leer van verhoudingen maar nu van (gehele) getallen. Veelvuldig wordt de onbeperktheid van priemgetallen aangehaald.

Het tiende boek wordt als een van de moeilijkste beschouwd. Hierin vinden we een meetkundige classificering van kwadratische irrationalen en hun vierkantswortels.

De laatste drie boeken bevatten de stereometrie en brengen de lezer via ruimtehoeken, de inhouden van blokken, prisma's en piramiden tot de bol tot wat wel als de climax is beschouwd: de leer van de regelmatige lichamen met het bewijs dat hun aantal vijf bedraagt.

Archimedes

Archimedes was een Griekse wiskundige en natuurkundige die leefde van 287 - 212 v.Chr. in Syracuse op Sicilië. Hij studeerde wiskunde bij opvolgers van Euklides in Alexandrië en was een beroemdheid, vooral vanwege zijn uitvindingen. Voor koning Hieroon bedacht hij wapentuig ter verdediging van Syracuse tegen de Romeinen. Waaronder: katapulten en brandspiegels. Hij vond de schroef van Archimedes uit, een apparaat voor het oppompen van water. Daarnaast katrollen, hijskranen en nog een aantal andere apparaten.
Hij berekende met de zogenaamde 'uitputtingsmethode' (al reeds bedacht door Eudoxus) de oppervlakte en de inhoud van allerlei vlakke en ruimtelijke objecten. Ook heeft hij een redelijke benadering van pi weten te berekenen (zie het hoofdstuk over pi). Maar het bekendst is hij tegenwoordig door de wet van Archimedes.

De Wet van Archimedes

Een voorwerp in een vloeistof weegt zoveel minder als het gewicht van de hoeveelheid vloeistof die door het voorwerp is verplaatst.

Een lichaam, dat geheel of gedeeltelijk in een vloeistof is gedompeld, ondervindt een opwaartse kracht, gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof. Hierdoor vermindert het gewicht van het lichaam evenveel als de verplaatste vloeistof weegt. Bij elk drijvend lichaam, zoals een schip, maar ook bij de luchtballon en het luchtschip, komt deze wet van toepassing.

Het getal π

Pi is misschien wel een van de mysterieuste getallen die we kennen.
Pi is de 16e letter van het Griekse alfabet en stamt af van het woord 'perimetron' dat 'afstand eromheen' betekent, dus zoiets als ons woord omtrek. Omdat de cirkel een veel voorkomende figuur is, vind je al in heel oude culturen waarden voor het getal pi.
De eerste persoon die een benadering van het getal pi heeft uitgerekend, was Ahmes rond het jaar 1650 v.Chr. Dit is in feite niet helemaal waar want zoals al vermeld was het Ahmes die de aantekeningen overgeschreven heeft op het nu bekende Rhind Papyrus. Ahmes gaat er wel met de roem vandoor.
In de berekeningen beweerde Ahmes (voor het gemak neem ik Ahmes) dat wanneer hij een cirkel met een diameter van 9 eenheden had, de oppervlakte van de cirkel gelijk was aan de oppervlakte van een vierkant met zijde 8. Verder zei hij dat de oppervlakte van een cirkel gelijk was aan iets (pi) keer straal in het kwadraat. In dit geval komt dat op het volgende neer:

straal $^9/_2 = 4\frac{1}{2}$
straal kwadraat $(4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$
? x $20\frac{1}{4} = 64$ (8^2 van het vierkant met zijde 8)
? = $64/20\frac{1}{4} = 3{,}1604$

In het oude testament van de Bijbel (1 koningen 7 vers 23), rond 950 vChr., vond men een benadering van pi. Er werd namelijk een bad van gietijzer voor koning Salomon gemaakt en het volgende stukje kwam in het vers voor: 'Dit bad was "tien el van rand tot rand, terwijl een meetsnoer van dertig el het rondom kon omspannen". Als we aannemen dat het bad cirkelvormig was, dan was de omtrek dus 3 maal de middellijn, dus pi = 3.

Dan komen we in de Griekse oudheid een welbekende man tegen, Archimedes, die ook een benadering van pi heeft uitgerekend. Archimedes was een wiskundige en natuurkundige en leefde van 287 tot 212 vChr. In een van zijn boeken schreef hij over 'het opmeten van een cirkel'. Door gebruik te maken van veelhoeken kleiner en groter dan de cirkel. Hij kon namelijk wel de omtrek van een veelhoek uitrekenen en zo begon hij met een zeshoek ingeschreven in een cirkel met diameter 1. Die gaf 3 tot resultaat, dus pi was groter dan 3. Archimedes verdubbelde het aantal hoeken keer op keer totdat hij een 96 hoek kreeg. Met deze ingeschreven veelhoek zag je nauwelijks het verschil meer met de cirkel. Hij rekende de omtrek van een ingeschreven en een uitgeschreven 96 hoek uit en liet hiermee zien dat de waarde van pi tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ lag. Pi lag dus tussen 3,1408 en 3,1429 en bevestigde hiermee twee cijfer achter de komma.

Ook in China waren er mensen die zich bezig hielden met het getal pi. Een van die mensen was Zu Chongzhi (480 n.Chr.). Hij kwam met een waarde voor pi die pas 1000 jaar later werd verbeterd en waarvan er 6 decimalen juist waren. Zu Chongzhi zei dat de waarde van pi moest liggen tussen: 3.1415926 < pi < 3.1415927. Zu's nauwkeurige waarde was 355/113. De berekeningen die hij en zijn zoon uitgevoerd hebben om tot deze benadering te komen, zijn verloren gegaan. Wel zou men 355/113 kunnen afleiden.

Een andere Griek Ptolemeus, zo'n 100 n.Chr., had 377/120 gebruikt voor de waarde van pi. Als je het de tellers en de noemers van de getallen 377/120 van Ptolemeus en 22/7 (=3 1/7) van Archimedes van elkaar aftrekt, krijg je het getal 355/113.
Nog een leuk feitje is, dat er een maankrater naar Zu Chongzhi is vernoemd.

Aryabhata was een groot wiskundige en astroloog. Hij leefde van 475 tot 550 n.Chr. en was van Indische afkomst. Ook hij wist o.a. een benadering van pi te geven. Dit wel op een totaal verschillende manier dan zijn voorgangers. Aryabhata gebruikte 62832 als de omtrek van een cirkel met een diameter van 20000 zodat hij pi berekende met: $^{62832}/_{20000}$ = 3,1316. Zijn waarde voor pi werd veel in de Arabische wereld gebruikt.
Ook in de Arabische wereld bleef pi niet ongemerkt. Een beroemde wiskundige uit 1430 n.Chr., Al-Kashi, heeft pi ontzettend nauwkeurig weten te berekenen door de methode van Archimedes verder uit te werken. Al-Kashi verdubbelde de ingeschreven 96-hoek van Archimedes nog 23 keer. Hij kreeg daaruit een ingeschreven 805306368-hoek, die nog maar heel erg weinig van de cirkel verschilt. Dit was een gigantische berekening en uiteindelijk kreeg hij 3,14159265358979 als waarde van pi eruit.
Leuk om te weten is dat al-Kashi dit wilde, zodat hij de omtrek van de baan van Saturnus tot op een haarbreedte nauwkeurig kon uitrekenen (uitgaande van de veronderstelling dat de afstand correct bekend was). Het idee was dus pi zo nauwkeurig uit te rekenen dat dit voor altijd genoeg zou zijn. Hij was dan ook met 14 decimalen achter de komma de recordhouder.

Dit record heeft zo'n twee eeuwen stand gehouden. Een Nederlander van Duitse afkomst, Ludolf van Ceulen wist er nog een aantal decimalen achter de komma aan toe te voegen. Dit deed hij overigens op de manier van Archimedes, dus met het gebruik van veelhoeken. In 1596 wist hij tot twintig decimalen te berekenen en voor zijn dood nog eens 15 (35 totaal dus). Hij verkreeg 3,1415926535897932384626433832795029 als waarde van pi. Weer een leuk feitje, de 35 decimalen zijn in zijn grafsteen gebeiteld maar deze schijnt later verdwenen te zijn. Gelukkig is zijn grafschrift in een beschrijving van Leiden opgenomen zodat zijn werk eeuwig bewaard kon blijven.

In 1882 werd door de Duitse wiskundige C.L.F. von Lindemann bewezen dat pi een transcendent getal is: een getal dat geen uiterste waarde heeft. Men kan van pi zoveel termen berekenen als men maar wil, maar nooit zal een uiterste waarde van het getal worden gevonden. Sinds die tijd staat vast dat pi altijd een onmeetbaar getal is en zal blijven.

Dan komen we in periodes waarin men met nieuwere en snellere manieren veel meer decimalen van pi kon berekenen, zelfs tot 1000 achter de komma rond 1940. Het is niet meer interessant om al die mensen te gaan opnoemen die hier hun aandeel aan hebben. Met de komst van de computers kwamen er steeds meer en hogere records. Het hedendaagse record staat op 1,24 biljoen cijfers achter de komma dat in 2002 gevestigd is door Japanse wiskundigen. De berekening vergde 400 uur werk van een zeer krachtige computer.

Nog een allerlaatst leuk verhaaltje over pi dat dateert uit 2 juli 2005. Een 59-jarige Japanse mental coach heeft het wereldrecord 'uit-je-hoofd-zoveel-mogelijkgetallen-van-pi-op-noemen' verbroken. De man was na drie uur de tel kwijtgeraakt en moest toen weer opnieuw beginnen. Uiteindelijk slaagde hij erin het oude record bijna te verdubbelen door in deze poging 83431 getallen op te noemen.

Bronnenlijst

‘Babylonische Wiskunde’ – Ab van der Roest, Martin Kindt

‘Geschiedenis van de Wiskunde’ – D.J. Stuik

‘A history of mathematics’ – Victor J. Katz

Bab. wiskunde
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html

Bab. wiskunde
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html

Bab. wiskunde
http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/

Alle onderdelen
http://www.wiskundeweb.nl/Wiskundegeschiedenis/index.html

Rhind:
http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egyptpapyrus.html

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_algebra.html#rhind79

problem 24
http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_algebra.html#rhind24

Problem 79
http://press.princeton.edu/books/maor/sidebar_a.pdf
http://mathworld.wolfram.com/StIvesProblem.html

Egypt. Wisk.
http://www.gizagrid.com/maths.html

Griekse Wisk.
Members.tripod.lycos.nl/pws5havo/index.htm